# Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse $L_p$ für $p > 1$.

Von S. SIDON in Budapest.

Herr A. ZYGMUND[1]) bewies: Gehört

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

samt $f(x) \log^{+\frac{1}{2}} [f(x)]$ zur Klasse[2]) $L$ und erfüllt die Indexfolge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Bedingung $A: \frac{n_{k+1}}{n_k} > q > 1$, so muß $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2)$ konvergieren. R. E. A. C. PALEY[3]) bewies, daß die Konvergenz von $\sum (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2)$ auch immer stattfindet, wenn $f(x)$ samt ihrer Konjugierten zur Klasse $L$ gehört.

Durch Kombination der Tatsachen:

1) die Komposition der Fourier-Reihe einer Funktion der Klasse $L_p$ und einer der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}$, wo $p > 1$, ist die Fourier-Reihe einer beschränkten Funktion,[4])
2) hat die Indexfolge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Eigenschaft $B^l$, d. h. ist die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{n_k}\right)^l$, wobei $l$ eine positive ganze Zahl bedeutet, beschränkt, so gehört,

---

1) A. ZYGMUND, On the convergence of Lacunary Trigonometric Series, *Fundamenta Math.*, **16** (1930), S. 90—107.

2) Klasse $L_p$ bedeutet, wie üblich, die Gesamtheit der Funktionen, deren $p$-te Potenz im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Statt $L_1$ wird $L$ geschreiben.

3) R. E. A. C. PALEY, On the Lacunary Coefficients of Power Series, *Annals of Math.*, **34** (1933), S. 615–616.

4) Siehe z. B.: S. KACZMARZ, On Some Classes of Fourier Series, *Journal London Math. Society*, 8 (1933), S. 39—45.

wenn $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ konvergiert, $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos n_k x+b_k\sin n_k x)$ zur Klasse $L_{2l}$,[5])
ergibt sich der

Satz. *Gehört* $f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *zur Klasse* $L_p$ $(p>1)$ *und besitzt die Indexfolge* $n_1,\ldots,n_k,\ldots$ *die Eigenschaft* $B^q$, *wo* $q$ *ganz und* $\frac{p}{2(p-1)}\leq q<\frac{p}{2(p-1)}+1$ *ist, so konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)$.

Ich erwähne hier folgendes Korollar dieses Satzes:

*Erfüllt die Indexfolge* $n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots$ *die Bedingung A und bezeichnet* $N_1,\ldots,N_K,\ldots$ *die Folge der Exponenten der nichtverschwindenden Glieder der Potenzreihe* $\left(\sum_{k=1}^{\infty}z^{n_k}\right)^m$, *wo* $m$ *eine positive ganze Zahl ist, so muß, wenn* $f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *für ein* $p>1$ *zur Klasse* $L_p$ *gehört,* $\sum_{K=1}^{\infty}(a_{N_K}^2+b_{N_K}^2)$ *konvergieren.*

*(Eingegangen am 21. November 1934)*

[5]) Dies folgt aus der Ungleichung

$$\int_0^{2\pi}\left|\left[\sum_{j=1}^{k}(a_j+ib_j)e^{in_jx}\right]^{2l}\right|dx<C(l)\left[\sum_{j=1}^{k}(a_j^2+b_j^2)\right]^l,$$

wo $C(l)$ nur von $l$ abhängt.